

Билет № 8, вопрос 2

Формула для радиуса окружности, вписанной в правильный n -угольник. Запись, вывод

Дано: $A_1A_2A_3\dots A_n$ – правильный n -угольник,

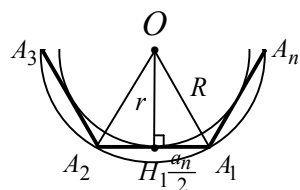
$$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = a_n,$$

$\omega(O; R)$ описана около n -угольника,

$\omega(O; r)$ вписана в n -угольник.

Выразить: 1) r через R ; 2) r через a_n .

Решение



Соединим точку O с вершинами A_1 и A_2 n -угольника $A_1A_2A_3\dots A_n$. В получившемся $\triangle A_1OA_2$ проведем высоту $OH_1 = r$.

Так как $OA_1 = OA_2 = R$, то $\triangle A_1OA_2$ – равнобедренный, а высота OH_1 является медианой и биссектрисой,

поэтому $A_1H_1 = \frac{a_n}{2}$, $\angle A_1OH_1 = \frac{\angle A_1OA_2}{2}$.

Так как $A_1A_2A_3\dots A_n$ – правильный n -угольник, то центральный угол $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$, а $\angle A_1OH_1 = \frac{360^\circ}{n} : 2 = \frac{360^\circ}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{180^\circ}{n}$.

Так как OH_1 – высота по построению, то $\triangle A_1OH_1$ – прямоугольный. В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90° , поэтому $\angle H_1A_1O = 90^\circ - \angle A_1OH_1 = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$.

$$\text{В } \triangle A_1OH_1 \sin \angle H_1A_1O = \frac{OH_1}{OA_1}; \sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{r}{R}.$$

Используя формулу приведения $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, получаем, что $\cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$.

$$\text{В } \triangle A_1OH_1 \operatorname{tg} \angle A_1OH_1 = \frac{A_1H_1}{OH_1}; \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{\frac{a_n}{2}}{r}; \Rightarrow$$

$$r = \frac{\frac{a_n}{2}}{\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\text{Ответ: } r = R \cos \frac{180^\circ}{n}; r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$\text{Если } n = 3, \text{ то } r_3 = R \cos \frac{180^\circ}{3} = R \cos 60^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}.$$

$$\text{Если } n = 4, \text{ то } r_4 = R \cos \frac{180^\circ}{4} = R \cos 45^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Если } n = 6, \text{ то } r_6 = R \cos \frac{180^\circ}{6} = R \cos 30^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Если } n = 3, \text{ то } r_3 = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{3}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Если } n = 4, \text{ то } r_4 = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{4}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{a}{2 \cdot 1} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Если } n = 6, \text{ то } r_6 = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{6}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow R = \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{n}}$$

$$r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$